Муниципальное образовательное учреждение

«Краснослободская средняя общеобразовательная школа № 4»

Статья для учителей математики

**«ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА**

**ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»**

Автор: учитель математики и физики высшей категории

Петрова Марина Александровна

г. Краснослободск – 2016 год.

Изучая по математике в 11 классе интеграл, многие учащиеся не осознают «красоты и мощи» интегрального исчисления при решении задач, в которых искомая величина является переменной. В данной статье предлагается несколько задач по физике, которые решаются с помощью интегрального исчисления. В них искомая физическая величина является переменной. Дело в том, что просто применять физические формулы в задачах, где физические величины в процессе наблюдения непрерывно меняются, нельзя. Если брать среднюю величину, то ответ получается очень приблизительным. Интегральное исчисление позволяет легко и просто решить точно подобные задачи.

К физическим величинам, которые можно найти с помощью интеграла, можно отнести перемещение, работу, массу, электрический заряд, давление, теплоту. Здесь они рассматриваются как функции отрезка. Перемещение вычисляется в зависимости от отрезка времени движения. Работа переменной силы при движении по прямой зависит от пройденного отрезка пути. Массу тонкого неоднородного стержня можно рассматривать как функцию от отрезков этого стержня. Электрический заряд, протекающий через поперечное сечение проводника, зависит от отрезков времени, за который мы производим измерение.

Изучая производную, учащиеся узнали, что различные физические величины являются скоростями изменения других величин. Так, скорость изменения перемещения будет обычная скорость; скорость изменения работы в зависимости от времени является мощность, а скорость изменения той же работы, но в зависимости от перемещения является сила. Скорость изменения массы – это её плотность. Короче говоря, если исходная величина нам задана в виде некоторой функции, то её скорость мы найдем как производную этой функции. Интеграл применяется тогда, когда известна скорость f искомой величины. Если искомую величину представить в виде приращения некоторой функции F, то f является производной F, а тем самым F – первообразной для f. В итоге искомая величина есть приращение первообразной для функции f, то есть интеграл от функции f. Тогда целый класс физических задач можно свести к нахождению определенного интеграла F =.

Можно классифицировать множество задач по физике и составить в качестве опоры следующую таблицу:

|  |  |
| --- | --- |
| **Обозначение физических величин** | **Нахождение физической величины с помощью интеграла** |
| s – перемещение  v – скорость | S = |
| А – работа  F – сила  N - мощность | A =  A = |
| m – масса тонкого стержня  ρ – линейная плотность | m = |
| q – электрический заряд  I – сила тока | q = |
| Q – количество теплоты  с - теплоемкость | Q = |

Рассмотрим решение нескольких физических задач, которые помогут окончательно убедить читателя в эффективности применения метода интегрирования при решении целых классов задач по физике.

**Задача 1**

Скорость движения тела определяется по формуле υ(t) = (3t2 - 2t)  .  
Какой путь тело пройдет за 5 секунд от начала движения?

Решение.

Из курса физики известно, что путь s, пройденный телом за время t при прямолинейном движении с постоянной скоростью v, определяется по формуле s = υ ∙t.

Если тело движется неравномерно, то скорость его меняется в зависимости от времени t, скорость есть функция, зависящая от времени t, т.е υ = f (t).

Разобьем время движения на бесконечно малые

υ(t) = (3t2 - 2t) см/с промежутки времени, чтобы υ на каждом из таких

t = 5 с промежутков была постоянной, тогда путь будет равен

S - ? сумме пройденных путей на всех таких промежутках.

t2 5

S = lim ∑ υ(t) Δt = ∫ υ(t) dt

Δt → 0 t1 0

5 5

S = ∫ (3t2 - 2t) dt = (t3 – t2) | = 100м

0 0

Ответ. S = 100 м.

**Задача 2**

Два тела начинают движение из одной и той же точки: одно со скоростью υ = 3t2 м/мин, второе тело со скоростью υ = 2t м/мин

На каком расстоянии друг от друга они будут через 10 минут, если они движутся по одной прямой в одном направлении?

Дано:

υ1 = 3t2

υ2 = 2t

t = 10 мин

Найти: ΔS - ?

Решение:

Путь, пройденный первым телом за 10 мин, равен

10 10 10

S1 = lim ∑ υ1(t) Δt = ∫ 3t2 dt = t3│=1000м

Δt → 0 0 0 0

Путь, пройденный вторым телом за 10 мин, равен

10 10 10

S2 = lim ∑ υ2(t) Δt = ∫ 2 t dt= t2 │=100 м

Δt → 0 0 0 0

ΔS = S1 - S2 = 1000 м – 100 м = 900 м

Ответ. ΔS = 900 м.

**Задача 3**

Сила в 6 Н растягивает пружину на 8 см. Какую работу она при этом совершает?

Дано:

F = 6 Н

х = 8 см = 0,08 м

А - ?

Решение:

Согласно закону Гука:

F = к ∙∆х, тогда коэффициент жесткости пружины найдем по формуле:

к = = = 75 .

Если тело движется по прямой линии под действием постоянной силы F, то работа, совершаемая этой силой на пройденном пути, равном х, находится по формуле А=F ∙x. Но если движение тела происходит под действием переменной силы, то её работа определяется сложнее, так как переменную силу рассматриваем как функцию, зависящую от х, то есть в нашей задаче F(х)=75х, а работа будет равна сумме работ на бесконечно малых участках:

0,08 0,08 0,08

А = lim ∑ F(х) Δх = ∫75х dх = 75 · │= 75 ·(0,0032 – 0) = 0,24 Дж

Δt → 00 0 0

Ответ. А = 0,24 Дж.

**Задача 4**

Два электрических заряда е1 = +100 Кл е2 = +50 Кл закреплены неподвижно на расстоянии 10 см друг от друга. Какую работу совершит сила отталкивания зарядов, если заряд е2 освободить, и он, перемещаясь, удалиться на расстояние 50 см.?

Дано: Решение: А = F∙s

е1 = +100 Кл Сила F является переменной, так как зависит от

е2 = +50 Кл расстояния.

х 1 = 10 см = 0,1 м F(х) = к|е1||е2|/х2, где к–коэффициент пропорциональности.

х2 = 50 см = 0,5 м Разобьем весь путь на бесконечно малые участки

так, чтобы сила F на каждом из таких участков была

А - ? постоянной. Тогда работа А будет равна сумме работ на

всех таких участках.

0,5 0,5 0,5 0,5

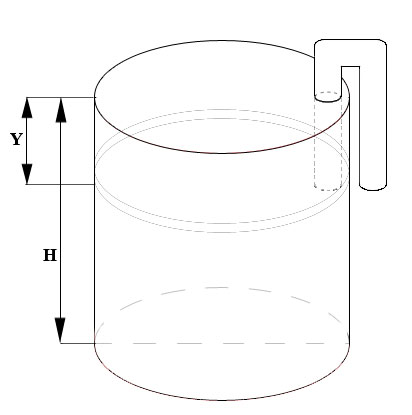
А = lim ∑ к|е1||е2|/ х2 Δх = ∫ к| е1|| е2 |/ х2 dх = к|е1||е2| ∫ х-2 dх = к|е1||е2| ( -1/х) │dх =

Δх→0 0,1 0,1 0,1 0,1

= к|е1||е2| (-1/0,5 + 1/0,1) = 9∙109 ∙100 ∙50 ∙(-2+10) = 45000 ∙ 109 ∙ 8 = 36 ∙ 1013 Дж

Ответ: А = 36 ∙ 1013 Дж.

**Задача 5**

Цилиндрический сосуд с диаметром основания D = 50 см и высотой H = 70 см наполнен водой. Какую работу нужно произвести, чтобы выкачать всю воду из сосуда?

Решение.

Если бы мы подняли на некоторую высоту бак вместе с водой, то работу, необходимую для этого, нашли бы легко простым умножением веса груза на высоту подъема. Но работа, совершаемая при выкачивании жидкости, определяется сложней, так как жидкость в этом случае поднимается не вся сразу, а слоями, причем высота подъёма у разных слоев разная. Для решения задачи разобьем цилиндр плоскостями параллельными его основанию.

Дано: А = FS, где F – сила, а S – путь.

D = 50 см = 0,5 м F = mg

H = 70 см = 0.7 м m = ρV = ρπr2H, то есть

F = ρπr2g Δy, тогда работа равна

А - ? тогда работа равна:

0,7 0,7 0,7

А = ∫ ρπr2gydy = ρπr2g ∫ydy = ρπr2g ∙y2/2 │= 1000· 3,14∙ 0,0625· 9,8∙ 0,49/2 = 471 Дж

0 0 0

Ответ: А=471 Дж.

**Задача 6**

В цилиндре с подвижным поршнем заключен атмосферный воздух. Объем цилиндра равен 0,2 м3. Поршнем воздух сжимается до объема 0,06 м3. Найти работу, произведенную силой давления воздуха, если температура воздуха поддерживается одинаковой.

Решение:

pV=k, где k=const

Аi =p s ∆xi,  где р – давление воздуха на единицу площади, s – площадь поршня

Но s ∆xi =∆Vi объем i слоя цилиндра

Так как р = , то Аi = к ,

Найдем к. Известно, что нормальное атмосферное давление равно 101300 Па. Тогда к = p ∙ V = 101300 ∙ 0,2 =20260 Н ·м.

V1 V1 V1

A = lim ∑  ΔV = ∫  dV= k ln V │==k (lnV1 –ln V0) = k ln = 20260 ln = 20260 ∙1,2 =

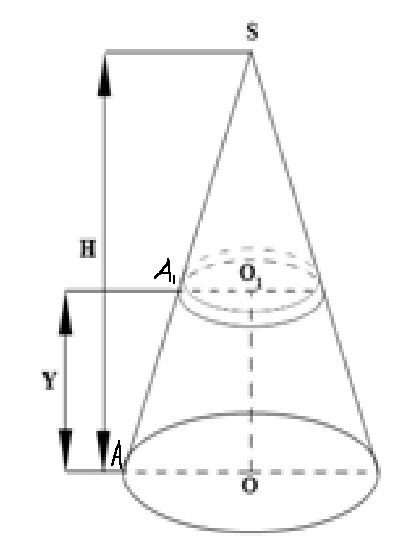
ΔV→0 V0 V0 V0

= 24312 Дж

Ответ: А = 24312 Дж.

**Задача 7**

Какую работу надо произвести, чтобы насыпать кучу песку конической формы, радиус основания которой 1,2 м, а высота 1 м? Удельный вес песка 2000 .



|  |  |
| --- | --- |
| Дано:  R=1,2 м  Н= 1м  ρ=2000 | Решение:  ∆V = ∏∙ А1О12∙∆у  ∆ASO подобен ∆ А1SO1  =  ;  = ; A1O1 = ;    ∆V= ∏ ;  ∆P =∆m∙g = ρ∙∆V ∙g = ρ∙g ∙∏ ∙ ;    ∆A = ∆P∙Y= ρ∙g ∙∏ ∙ ;    H  А = lim ∑  ρ∙g ∙∏ ∙ =  Δy→0  0  H  = ∫  ρ∙g ∙ ∏ ∙ =  0  = ∙Y dY=  1  =88623,36∙( - + )│ = 7385,28 Дж  0 |
| Найти: A | Ответ: А= 7385,28 Дж |

Это далеко не весь перечень всевозможных реальных физических задач, с которыми человек сталкивается в практической деятельности. Надеюсь, что данная статья поможет учителю математики мотивировать школьников к глубокому и качественному изучению дифференциального и интегрального исчисления.